

まずポップスターの形状の数学的特徴を調べなくてはならないが、この程度の議論で行数をかさばらせることがあまりにもったいないので、簡単なことは早々と済ませる。なぜそうなるかは読者の方々にご自分で作図して計算して頂きたい。

以下では次のような言葉を断りなく用いるので、最初に留意されたい。

中心：ポップスターの球部の中心のこと。

先端：ポップスターの円錐部の頂点のこと。

円錐の足：円錐部と球部が接する円のこと。断面図においては円錐の母線と球部の断面が接続される点を指す。

長径：中心から先端までの長さ。Aのことである。

短径：球部の半径のこと。Rと表す。

さて、5つの頂点を通るただ一つの平面でポップスターを切断したときの断面図を考える。このとき各円錐の足は（ポップスターの形の定義その3により）隣の円錐とそれを共有する。よってこのとき見られる円錐の足は全部で5つである。このとき5つの円錐の足を中心から見て反時計回りに次々と線分で結ぶと、このときできる図形は明らかに正五角形である。更に中心から正五角形の一辺へ垂線を下ろし、その線分の長さを A_0 と置く。線分を更に延長すると円錐部の頂点を通過するが、このとき線分と円錐の母線がなす角を Φ と置く（つまり円錐の軸と母線のなす角）。

このとき次の諸量が計算される。

$$(a) \quad \Phi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{5} \quad \therefore \Phi = \frac{\pi}{10}.$$

$$(b) \quad A_0 \tan \frac{\pi}{5} = A_0 \cdot \frac{2 \tan \frac{\pi}{10}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{10}} = (A - A_0) \tan \frac{\pi}{10}$$

$$\Leftrightarrow 2A_0 = (A - A_0)(1 - \tan^2 \frac{\pi}{10}) \quad \therefore A_0 = A \cdot \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{10}}{3 - \tan^2 \frac{\pi}{10}}.$$

$$(c) \quad R = A_0 \sec \frac{\pi}{5}.$$

(d:ポップスターの表面積S)

Sを求めるには単純に(i)半径Rの球の表面積と(ii)軸と母線のなす角が Φ で高さが $(A - A_0)$

の円錐の側面積5つ分を足したのち、(iii)球面のうち1つの円錐の足によって切り取られる領域（のうち円錐に覆い隠される方）の面積5つ分を引けば良い。

(i)は明らかに $4\pi R^2$ 、(ii)は側面を展開してできる扇型の中心角が $2\pi \sin \Phi$ であることから $5 \times (1/2) \times ((A-A_0) \sec \Phi)^2 \times 2\pi \sin \Phi$ 、(iii)の1つ分の表面積はアルキメデスの原理により底面の半径が R で高さが $(R-A_0)$ の円柱の側面積に等しくなるのでこれに5を乗じる。

よって

$$S = 4\pi R^2 - 5 \cdot 2\pi R \cdot (R - A_0) + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot ((A - A_0) \sec \Phi)^2 \cdot 2\pi \sin \Phi$$

(e:ポップスターの体積V)

Vを求めるには単純に(i)半径 R の球の体積と(ii)軸と母線のなす角が Φ で高さが $(A-A_0)$ の円錐の体積5つ分を足したのち、(iii)『半径 R の球体とその表面の一点に関して、その点を通る球の半径に垂直で点との距離が $(R-A_0)$ であるような平面で球体を切断したときできる立体のうち、球体の中心を含まない方の立体』の体積5つ分を引けば良い。

(i)は明らかに $4\pi R^3/3$ 、(ii)も底面の半径を計算すれば簡単に求まって $5 \times (\pi(A-A_0)^3 \tan^2 \Phi)/3$ 。

(iii)は積分を使って求める。即ち xy 平面上に定義域 $[A_0, R]$ で定義される曲線 $y=(R^2-x^2)^{1/2}$ を考え、これを x 軸を軸に回転させた立体の体積を求める。その体積 v は

$$v = \int_{A_0}^R (R^2 - x^2) dx = \left[xR^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{A_0}^R = \frac{2}{3}R^3 - A_0R^2 + \frac{A_0^3}{3}$$

以上を用いて体積Vは

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 5 \cdot \pi \left(\frac{2}{3}R^3 - A_0R^2 + \frac{A_0^3}{3} \right) + 5 \cdot \frac{\pi(A - A_0)^3 \tan^2 \Phi}{3}$$

さてこれらの諸量を求めた所で、Aを用いてポップスターの地表付近の平均重力加速度を求めることを試みる。

つまりポップスターの地表を曲面 S と表すことにすると求める平均重力加速度 $\langle g \rangle$ は

$$\langle g \rangle = \frac{1}{S} \int_S \frac{GM}{r^2} dS.$$

で表されるので、あとはこの積分を解くだけである。

S を分割する。球体部を S_0 、円錐部を S_1, \dots, S_5 とする。このとき明らかに

$$\int_{S_1} = \int_{S_2} = \dots = \int_{S_5}$$

$$\therefore \langle g \rangle = \frac{GM}{S} \left(\int_{S_0} \frac{dS_0}{r^2} + 5 \int_{S_1} \frac{dS_1}{r^2} \right)$$

さてこの式のうち S_0 の積分を(1)、 S_1 の積分を(2)と置いて計算を進める。

(計算開始)

(1)

S_0 は球部（ここでは呼んでいる）、厳密には球面から5つの円錐の足に囲まれた領域を除いた曲面である。即ち S_0 上の全ての点についてその中心からの距離 r は $r=R$ で一定である。よって

$$\begin{aligned} \therefore \int_{S_0} \frac{dS_0}{r^2} &= \frac{1}{R^2} \int_{S_0} dS_0 \\ &= \frac{1}{R^2} (4\pi R^2 - 10\pi R(R - A_0)) \end{aligned}$$

(2)

円錐の軸の方向（底面から頂点に向かう向き）に x 軸を設け、底面と x 軸の交点が $x=A_0$ 、頂点と x 軸の交点が $x=A$ となるように原点を取る。

次に x 軸上の閉区間 $[A_0, A]$ に点列 $\{x_i\}$ を作り（ $x_0=A_0, x_n=A$ ）、各点を通り円錐の軸に垂直な平面で S_1 を切断し n 個に細分することを考える。円錐が細分されてできた輪切りの円錐の側面の面積を、底面に近い方から順に $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ とする。このとき

$$\Delta S_i \approx 2\pi(A - x_i) \tan \Phi \cdot (x_i - x_{i-1}) \sec \Phi$$

また、曲面上の各点の中心からの距離 r について考える。曲面上の任意の点の x 座標を x とすると三平方の定理より

$$r^2 = x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi$$

以上より

$$\therefore \int_{S_1} \frac{dS_1}{r^2} = \int_{A_0}^A \frac{2\pi(A - x) \tan \Phi \sec \Phi}{x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi} dx$$

以下、この式の計算方法を書き連ねる。

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \frac{dS_1}{r^2} &= \int_{A_0}^A \frac{2\pi(A-x)\tan\Phi\sec\Phi}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} dx \\
&= 2\pi \tan\Phi\sec\Phi \int_{A_0}^A \frac{A-x}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} dx \\
&= 2\pi \tan\Phi\sec\Phi \left(\int_{A_0}^A \frac{A\cos^2\Phi}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} dx - \int_{A_0}^A \frac{x - A\sin^2\Phi}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} dx \right)
\end{aligned}$$

最右辺の第一項を(i)、第二項を(ii)とする。

(i).

$$\begin{aligned}
&\int_{A_0}^A \frac{A\cos^2\Phi}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} dx \\
&= A\cos^2\Phi \int_{A_0}^A \frac{dx}{x^2 + (A-x)^2 \tan^2\Phi} \\
&= A\cos^4\Phi \int_{A_0}^A \frac{dx}{x\cos^2\Phi + (A^2 - 2Ax + x^2)\sin^2\Phi} \\
&= A\cos^4\Phi \int_{A_0}^A \frac{dx}{x^2 + A^2\sin^2\Phi - 2Ax\sin^2\Phi} \\
&= A\cos^4\Phi \int_{A_0}^A \frac{dx}{x^2 + A^2\sin^2\Phi(\sin^2\Phi + \cos^2\Phi) - 2Ax\sin^2\Phi} \\
&= A\cos^4\Phi \int_{A_0}^A \frac{dx}{(x - A\sin^2\Phi)^2 + A^2\sin^2\Phi\cos^2\Phi} \\
&= A\cos^4\Phi \left[\frac{1}{A\sin\Phi\cos\Phi} \arctan \frac{x - A\sin^2\Phi}{A\sin\Phi\cos\Phi} \right]_{A_0}^A \\
&= \cos^2\Phi \cot\Phi \left[\arctan \frac{x - A\sin^2\Phi}{A\sin\Phi\cos\Phi} \right]_{A_0}^A
\end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x - A \sin^2 \Phi}{x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi} dx \\
&= \frac{\cos^2 \Phi}{2} \int \frac{dt}{t} \quad (t = x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi) \\
&= \frac{\cos^2 \Phi}{2} \log t + C \quad (C \equiv \text{const.}) \\
\therefore \int_{A_0}^A \frac{x - A \sin^2 \Phi}{x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi} dx &= \frac{\cos^2 \Phi}{2} \left[\log(x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi) \right]_{A_0}^A
\end{aligned}$$

以上をあわせて、

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \frac{dS_1}{r^2} &= 2\pi \tan \Phi \sec \Phi \left(\int_{A_0}^A \frac{A \cos^2 \Phi}{x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi} dx - \int_{A_0}^A \frac{x - A \sin^2 \Phi}{x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi} dx \right) \\
&= 2\pi \tan \Phi \sec \Phi \left(\cos^2 \Phi \cot \Phi \left[\arctan \frac{x - A \sin^2 \Phi}{A \sin \Phi \cos \Phi} \right]_{A_0}^A - \frac{\cos^2 \Phi}{2} \left[\log(x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi) \right]_{A_0}^A \right) \\
&= \pi \sin \Phi \left(2 \cot \Phi \left[\arctan \frac{x - A \sin^2 \Phi}{A \sin \Phi \cos \Phi} \right]_{A_0}^A - \left[\log(x^2 + (A - x)^2 \tan^2 \Phi) \right]_{A_0}^A \right) \\
&= \pi \sin \Phi \left(2 \cot \Phi \left(\arctan(\cot \Phi) - \arctan \frac{A_0 - A \sin^2 \Phi}{A \sin \Phi \cos \Phi} \right) - 2 \log A + \log(A_0^2 + (A - A_0)^2 \tan^2 \Phi) \right)
\end{aligned}$$

(計算終了)

さて(1),(2)を合わせると求める式が得られる。本文中でポップスターの平均密度を5500とするとしたので、 $M=5500V$ は明らか。 $G=6.67 \times 10^{-11}$ とすれば求める $\langle g \rangle$ は

$$\begin{aligned}
\langle g \rangle &= \frac{GM}{S} \left(\int_{S_0} \frac{dS_0}{r^2} + 5 \int_{S_1} \frac{dS_1}{r^2} \right) \\
&= 6.67 \cdot 5.5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{3} \frac{4\pi R^3 - 5\pi(2R^3 - 3A_0R^2 + A_0^3) + 5\pi(A - A_0)^3 \tan^2 \Phi}{4\pi R^2 - 5\pi R^2(R - A_0) + 5\pi((A - A_0)\sec \Phi)^2 \sin \Phi} \\
&\quad \left(\frac{1}{R^2} (4\pi R^2 - 5\pi R^2(R - A_0)) + 5\pi \sin \Phi \left(2 \cot \Phi \left(\arctan(\cot \Phi) - \arctan \frac{A_0 - A \sin^2 \Phi}{A \sin \Phi \cos \Phi} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \log A + \log(A_0^2 + (A - A_0)^2 \tan^2 \Phi) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Phi = \frac{\pi}{10} \\ A_0 = A \cdot \frac{1 - \tan^2 \Phi}{3 - \tan^2 \Phi} \\ R = A_0 \sec \frac{\pi}{5} \end{array} \right)$$

このとき $\langle g \rangle = 15.7$ となるAを選べば良い。