今回求めるべき方程式は、リボンちゃんがポップスターの重力に引かれて落下する時に描く軌跡の方程式である。
これを一般に言い換えれば、次のようになる。
『有向線分 AP のスカラー倍でない初速度 v_0 を持った物体 A(質量 m)が十分大きな質量を持った質点 P(質量 M)の重力に引かれて落下する時の方程式を求める。』
即ち、次のように定義するのである。

リボンちゃんとクリスタルを合わせた質量=m
計測の瞬間の速度(初期条件 t=0 のとき)=v_0
ポップスターの質量=M

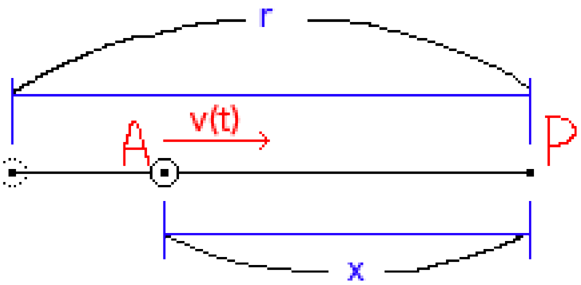
この上で、方程式を導き出すまでの手順を論じる。

まず本題に入る前に、先に片づけなければならない問題がある。
今回の考察において留意せねばならぬ点は、

1.落下の際の加速度は一定ではない。

2. A は P を中心として回転運動をするわけだが、この時の角速度が一定でなく、その振る舞いはわからない。

である。
そして我々は、加速度が一定である場合は物体が $x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ の法則に従い運動することを知っているものの、重力加速度が一定でない場合に物体がどのような振る舞いをするかをまだ知らない。
だからまず、万有引力の法則に従って、重力加速度が一定でない場合での落下の性質を調べたいと思う。つまり、上の本題を片づける場合に、$v_0=0$ の特別な場合について論じようと言うことである（当たり前だが、$v_0=0$ の場合、A は P に向かってまっすぐに吸い込まれる。）



質量 m の物体 A が最初、十分に大きな質量を持った質点 P(質量 M)から r の距離の地点に初速度 0 で止まっているとし、A を M に向かって自由落下させる実験を考えます。また、t 秒後の AP 間の距離を x、t 秒後の物体の速度を v(t)と置きます。ここで当然、A は落下しているのですから、t が増加するにつれて x（即ち AP 間の残りの距離）は次第に小さくなってゆきます。つまり、x が減少関数であることをここで確認しておきます。
さて、エネルギー保存の原理より

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}mv(0)^2 + \int_x^r \frac{GMm}{x^2}dx$$

です。この等式は、0 秒後の物質のエネルギーと t 秒後の物質のエネルギーが同じであることを示しています。(右辺の第二項は、t 秒後の A の位置を基準とした 0 秒目の A の位置エネルギーですね。)
そしてここで、初期条件 v(0)=0 より、

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = \int_x^r \frac{GMm}{x^2}dx = GMm\left[\frac{-1}{x}\right]_x^r = GMm\frac{r-x}{rx}$$

$$\Leftrightarrow v(t)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2GM\frac{r-x}{rx}$$

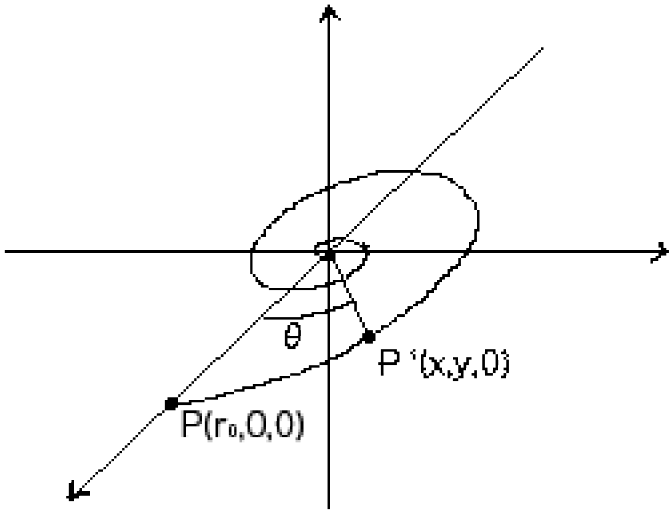
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2GM\frac{r-x}{rx}}$$

ここで先程確認したように、x は減少関数ですから、任意の区間でその導関数は負の値を取ります。よって

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2GM\frac{r-x}{rx}} \qquad \cdots(1)$$

となります。
かくして、落下距離 x についての微分方程式が得られます。これを解けばもち

ろん、重力加速度が一定でない場合の t 秒間の落下距離の公式が得られますが、ここでは物体 A の振る舞いさえわかれば良いので、x の導関数さえ得られれば十分です。



さて本題に入ります。
即ち、有向線分 AP のスカラー倍でない初速度 v_0 をもった質量 m の物体 A が、十分に大きな質量を持った質量 M の質点 P に重力によって吸い込まれてゆくときに描く、『螺旋』のような軌跡の方程式を求めます。（質点 P は固定されているものとします。）
計算は空間座標上で行いますから、最初に空間座標を定義しましょう。当然質点 P を原点 O として xyz 座標を作りますが、この時わかりやすいように、物体 A の初期条件の点が x 軸上にくるようにして残りの y 軸、z 軸を定義します。
ただし A はこの時ただ一つの平面上で運動しますから、この平面が xy 平面と一致するように y 軸を取ります。即ち任意の点 A の座標 A(x.y,z)について、$z \equiv 0$ です。
そして A の初期条件における A の速度を v_0 としましたが、その x 軸方向成分、y 軸方向成分をそれぞれ v_{0x}, v_{0y} とします。A が xy 平面上のみで運動するように xyz 座標をとりましたから、当然 v_0 の z 軸方向成分は 0 です。また v_0 は有向線分 AP のスカラー倍ではありませんから、$v_{0y} \neq 0$ です。
同様に、任意の点 A の速度を v と定義します。
―――また、$v_{0y} \neq 0$ である限りこの運動は直線運動ではありませんから、運動の任意の点で点 A の角運動量は保存します。
ここで初期条件の点において角運動量 L_0 は、

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_{0x} \\ mv_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr_0 v_{0y} \end{pmatrix} \quad ・・・（２）$$

で、次に任意の点 A(x,y,z)について、この点における速度は(dx/dt,dy/dt,0)ですから、つまり任意の点での角運動量 L は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{dy}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mx\dfrac{dy}{dt} - my\dfrac{dx}{dt} \end{pmatrix} \quad ・・・（３）$$

です。角運動量が運動の任意の点で保存すると言うことは、（２）≡（３）ですから、結局、

$$r_0 v_{0y} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \quad ・・・（４）$$

です。これが我々がこの先計算を進めていくに当たって成り立っている、一つ目の『条件式』です。
さて、本筋に話を戻します。
―――ここで気がつかなければならないことは、例えば我々が高い所から水平方向に物体を投げ出した時に、その時の水平方向の速度がどうであれ鉛直方向の速度だけを見ればそれは自由落下運動にほかならないのと同じように、今回の軌跡においても、物体は原点を中心に回転しつつも、原点方向の速度成分だけを見ればそれは前の項で述べた『重力加速度が一定でない場合の落下運動』にほかならないのです！
前の項で求めた（１）の式が、ここで生きてきます。つまり今回求める軌跡は、任意の点 A を x 軸を始線とした xy 平面上の極方程式で表すと簡単だと言うことです。
ですから今より、この考察の最終目的を『リボンちゃんの落下軌道は x,y の方程式ではなく、r, θ の極方程式で表そう！』ということにします。以後の文章はそのつもりで読んで下さい。

（１）の式をどのようにこの空間座標上で利用するかと言いますと、即ち、前の項において t 秒後の AP 間の距離を x と置いたのを、（極方向で見ていますから、これは点 A の動径の大きさで）r と置き、混乱を防ぐため、前の項で r とおいたもの（AM 間の最初の距離ですね）のを r_0 とします。
ですからここで、A の初期条件は次のようになりますね。

$$t=0 \Leftrightarrow A(x,y,z)=A(r_0,0,0) \Leftrightarrow v=v_0=(v_{0x},v_{0y},0) \Leftrightarrow \theta=0 \Leftrightarrow r=r_0$$

もちろんθは、任意の点 A の偏角です。
さてこの時、今述べたように原点方向の速度（即ち dr/dt ですね）については（１）の関係が成り立ちますから、即ち、（１）の式について x→r, r→r_0 として、

$$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2GM\frac{r_0-r}{r_0 r}} \quad ・・・（５）$$

です。これで求める極方程式のうち、動径 r の方の振る舞いはわかりました。
ですから次に、偏角θの t についての振る舞いを調べ、それぞれの導関数から r とθの関係式を作れば、それが求める極方程式です。
即ち、我々はこれから、

$$\frac{d\theta}{dt}$$

の値を調べていきます。
―――さて、どうやったら未知のθを t で微分できるでしょうか。
実は性質上、x,y が決まれば偏角θは決まりますから、θは x,y の関数です。
即ち、

$$tan\theta=\frac{y}{x}$$

ですから、-π/2≦θ≦π/2 において、

$$\theta=\arctan\frac{y}{x} \quad ・・・（６）$$

ですね（$-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ に限ったのは、一般に arctan の定義域が $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とされているからです。）

・・・さて、図を描けば明らかですが、たとえば $\pi/2 \leqq \theta \leqq 3\pi/2$ の場合、arctan(y/x)を計算すると、実際の偏角よりも π 低い値で出てきてしまいます（例えば $\theta=4\pi/3$ の場合、$y/x=\sqrt{3}$ ですから arctan(y/x)の式を計算すると $\theta=\pi/3$ と出てきてしまいます。）

よって $\pi/2 \leqq \theta \leqq 3\pi/2$ のときについては、（６）の式に π 分の修正を加えれば良く、

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} + \pi$$

となることがわかります。

実は、任意の θ が整数 n について $(2n-1)\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ であるような場合、θ の値は

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} + n\pi \qquad \cdots（７）$$

です。これが θ を x,y で表した一般の式です。

つまり、θ を t で微分すると言うことは、（７）を t で微分すると言うことです。

さぁ、x と y は果たして t の関数で、それが arctan の中に入っていますから、これは合成関数です。合成関数の微分の公式を使いながら、（７）の式を微分してみましょう。

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\arctan\frac{y}{x} + n\pi)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$= \frac{r_0 v_{0y}}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{r_0 v_{0y}}{r^2}$$

・・・（８）

と、実に簡単な式になりました。

さてここで、$\frac{dr}{dt} \neq 0 \Leftrightarrow r \neq r_0$のとき

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dr}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dr} = \frac{dt}{dr}\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{r_0 r}{2GM(r_0 - r)}}\frac{r_0 v_{0y}}{r^2} \qquad ・・・（９）$$

ですから、r と θ の微分方程式が手に入ります。両辺を 0 から θ まで積分して、

$$\int_0^\theta d\theta = \theta = -\int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r_0 r}{2GM(r_0 - r)}}\frac{r_0 v_{0y}}{r^2}dr \quad ・・・（１０）$$

です。

これを解くと、

$$\theta = 2v_{0y}\sqrt{\frac{r_0(r_0 - r)}{2GMr}} \qquad ・・・（１１）$$

という、陰関数表示された関数 r が得られます。

またこれは、先で除いて考えた、$v_{0y}=0$ や $r=r_0$ の場合にも成り立っています。即ち $v_{0y}=0$ のとき A は $\theta \equiv 0$ の直線運動をし、$r=r_0$ のとき $\theta=0$ で A は初期条件を満たしています。

本来ならこれを r について解いて $r=f(\theta)$の形にするべきですが、あまり奇麗な形にならないようなので、これを持って本考察の目標達成とします。

＊ 尚、一応等式（１１）を r について解いてみると、

$$r = \left(\frac{GM}{2r_0^2 v_{0y}^2}\theta^2 + \frac{1}{r_0}\right)^{-1} \qquad （ただし 0<r<r_0 , v_{0y}\neq 0 , r_0\neq 0）$$

です。

また、この式をもとに Basic でグラフを描かせてみた所（2005 年 1 月)、それっぽい図形が得られました。